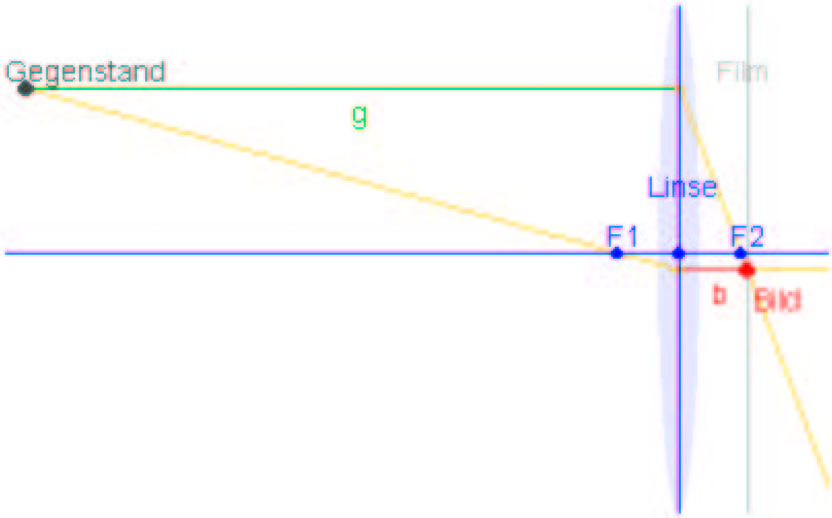
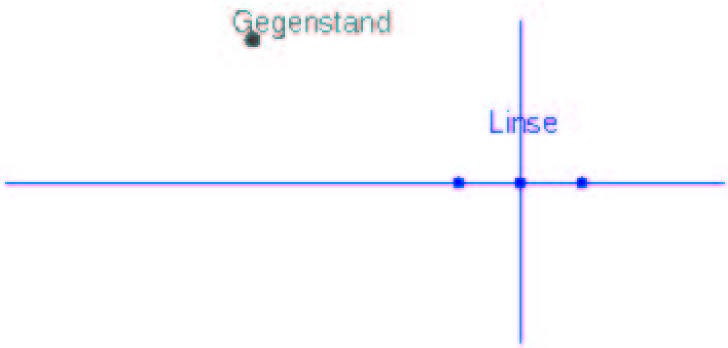
Begleitmaterial zum Modul Bruchgleichungen

Die folgende Abbildung zeigt dir, wie man mit Hilfe des Brennstrahls und des Parallelstrahls das Bild bestimmen kann.



1. *Führe eine entsprechende Konstruktion selbst durch. Beschrifte die Figur und miss die Bildweite b, d.h. den Abstand des Bildes von der Linse.*

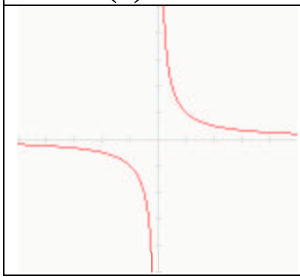
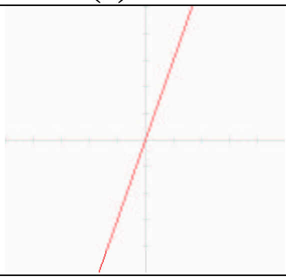
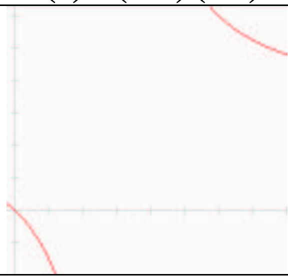
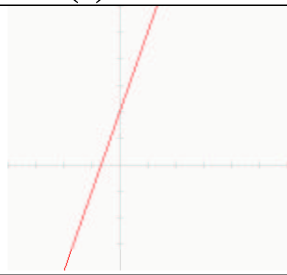


Einige Seiten später ergibt sich für die Bildweite b in Abhängigkeit von der Gegenstandsweite g die Formel $b = \frac{3g}{g-3}$.

2. *Für welchen Wert von g entsteht kein Bild?*
3. *Fülle die folgende Tabelle aus. Im Modul selbst findest du Hinweise, wie du deine Ergebnisse überprüfen kannst.*

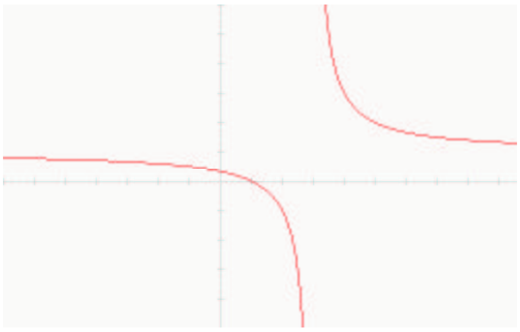
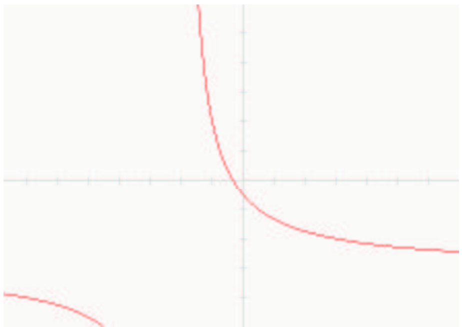
Gegenstandsweite g in cm	2	4	6	15	20	30
Bildweite b in cm						

An dieser Stelle wollen wir dir noch einmal die wichtigsten Graphen und ihre Funktionsgleichungen zeigen. Die Gleichungen zeigen wir dir in den Schreibweisen, die vom Plotter des Moduls benutzt werden.

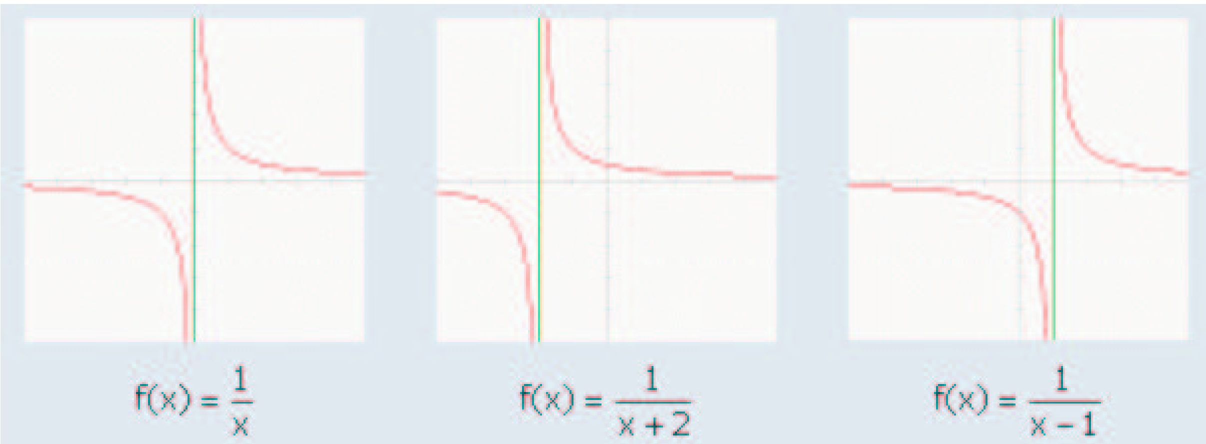
antiproportionale Funktion	proportionale Funktion mit der Steigung 3	Linsenfunktion	lineare, aber nicht proportionale Funktion
f(x) = 1/x	f(x) = 3*x	f(x) = (3*x)/(x-3)	f(x) = 3*x + 2
			

Der Graph der antiproportionalen Funktion und der Graph der Linsengleichung haben waagerechte und senkrechte Asymptoten. Das sind Geraden, denen sich der Graph immer mehr annähert, ohne sie zu erreichen.

4. *Zeichne für die folgenden Graphen die waagerechte und die senkrechte Asymptote ein. Gib auch deren Gleichungen an.*

Hier siehst du die normale Hyperbel sowie Hyperbeln, die nach links bzw. rechts verschoben wurden. Zugleich haben wir als Hilfe die senkrechten Asymptoten eingezeichnet. Die x-Achse ist in allen drei Fällen die waagerechte Asymptote.



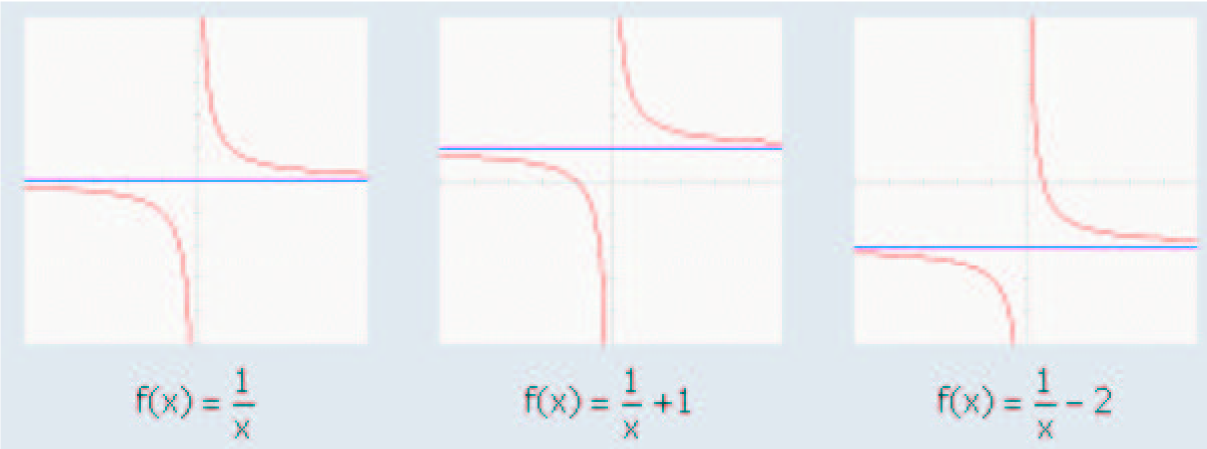
Aus diesen Abbildungen kann man folgende Regel ablesen:

Offensichtlich bewirkt die **+ 2** im Nenner von $f(x) = \frac{1}{x+2}$ eine Verschiebung um 2 nach **links** und die **- 1** im Nenner von $f(x) = \frac{1}{x-1}$ eine Verschiebung um 1 nach **rechts**.

5. *Zeichne die Graphen folgender Funktionen. Trage in allen Zeichnungen zuerst die senkrechte Asymptote ein.*

   a) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ *b)* $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$ *c)* $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$

Bei der Verschiebung nach oben bzw. unten ergeben sich folgende Graphen, Asymptoten und Funktionsgleichungen



Auch hier erhält man eine leicht fassliche Regel:

Die **+ 1** hinter dem Bruch von $f(x)=\dfrac{1}{x}+1$ bewirkt eine Verschiebung um 1 nach **oben** und die **- 2** hinter dem Bruch von $f(x)=\dfrac{1}{x}-2$ eine Verschiebung um 2 nach **unten**.

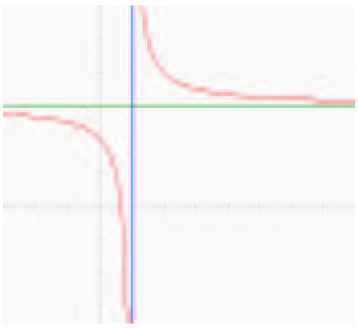
6. *Zeichne wie bereits in Aufgabe 5 die Graphen von*

   a) $f(x)=\dfrac{1}{x}-1$ *b)* $f(x)=\dfrac{1}{x}+2$ *c)* $f(x)=\dfrac{1}{x}-3$

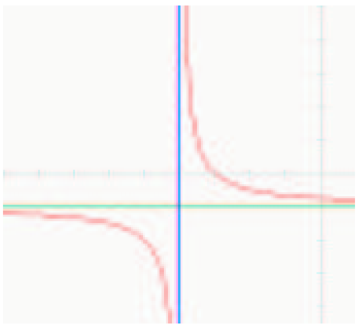
Jetzt folgen drei Graphen, die sowohl waagerecht als auch senkrecht verschoben sind.

7. *Gib zu allen drei Graphen die Funktionsgleichung und auch die Gleichungen der waagerechten und senkrechten Asymptoten an.*

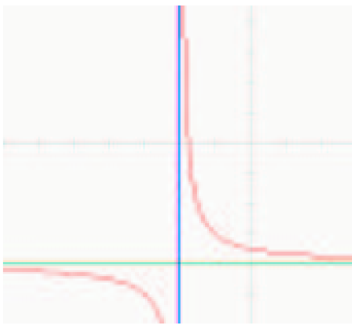
a)



b)



c)



Die drei Funktionsgleichungen aus Aufgabe 7 haben alle dieselbe Form. Dies bringt man in der Mathematik dadurch zum Ausdruck, dass man für die konkreten und von Funktion zu Funktion wechselnden Zahlen Formvariable benutzt. Damit haben also alle unsere Funktionsgleichungen die Form $f(x)=\dfrac{1}{x+a}+b$.

8. *Wie groß sind a und b in den folgenden Funktionsgleichungen?*

a) $f(x)=\dfrac{1}{x-3}+5$ *b)* $f(x)=\dfrac{1}{x+2}-1$ *c)* $f(x)=\dfrac{1}{x}+3$

Jetzt kannst du in einer Regel zusammenfassen, wie sich die „Normalhyperbel“ mit der Gleichung $\mathrm{f}(\mathrm{x})=\dfrac{1}{\mathrm{x}}$ verschiebt, wenn man die ursprüngliche Funktionsgleichung durch die Gleichung $\mathrm{f}(\mathrm{x})=\dfrac{1}{\mathrm{x}+\mathrm{a}}+\mathrm{b}$ ersetzt.

9. *Formuliere eine Regel über die Verschiebung des Graphen von* $f(x)=\dfrac{1}{x+a}+b$ *gegenüber der „Normalhyperbel“.*

Das zentrale Thema unseres Moduls ist das graphische Lösen von Gleichungen. Dieses Lösungsverfahren gliedert sich in folgende Schritte:

Graphisches Lösungsverfahren für beliebige Gleichungen

- Darstellung beider Seiten der Gleichung durch einen Funktionsterm.
- Graphische Veranschaulichung beider Terme in einem gemeinsamen Koordinatensystem.
- Bestimmung der x-Koordinate des Schnittpunktes bzw. der x-Koordinaten aller Schnittpunkte.

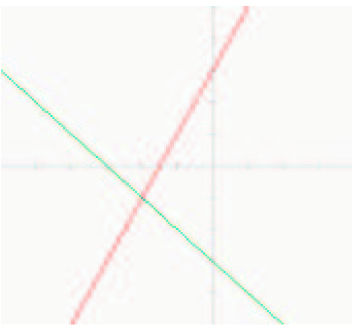
10. *Bestimme rechnerisch und graphisch für die Gleichung 2x + 3 = - x + 9 die Lösungsmenge.*

Graphische Lösungsverfahren haben gegenüber rechnerischen Vor- und Nachteile.

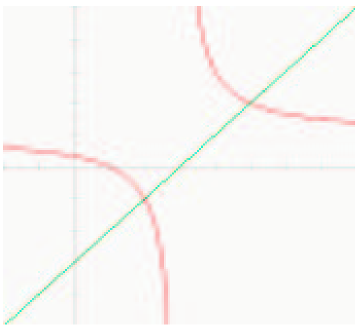
Vorteile	**Nachteile**
• Man erkennt gut die Anzahl der Lösungen. • Durch ein genaues Zeichnen kann man die Lösungen ziemlich genau ablesen. • Auch komplizierte Gleichungen, die du noch nicht nach x auflösen kannst, lassen sich so bearbeiten.	• Zeichnerische Lösungen sind prinzipiell ungenau. • Das Zeichnen der beiden Funktionsterme geht nur dann schnell und gut, wenn man weiß, wie die Graphen aussehen.

11. *Lies aus den folgenden Zeichnungen die Lösungsmenge der Gleichungen ab.*

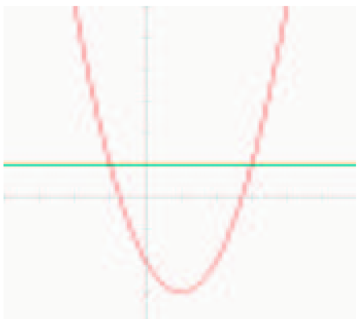
a)



b)



c)



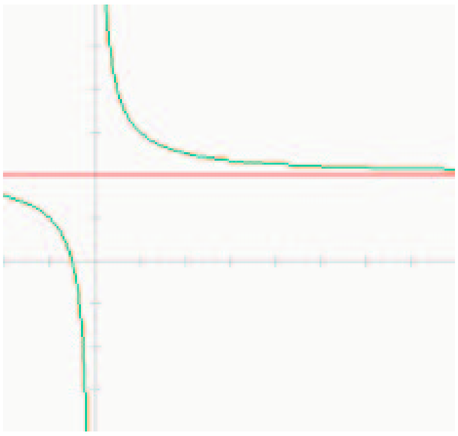
Im zentralen und letzten Abschnitt soll es jetzt nicht um das Lösen linearer Gleichungen (Teilaufgabe 11 a)) bzw. quadratischer Gleichungen gehen (Teilaufgabe c)), sondern ausschließlich um Bruchgleichungen. Wie schon erwähnt, sind Bruchgleichungen solche Gleichungen, die eine Variable im Nenner haben.

12. Suche unter den Gleichungen die Bruchgleichungen heraus

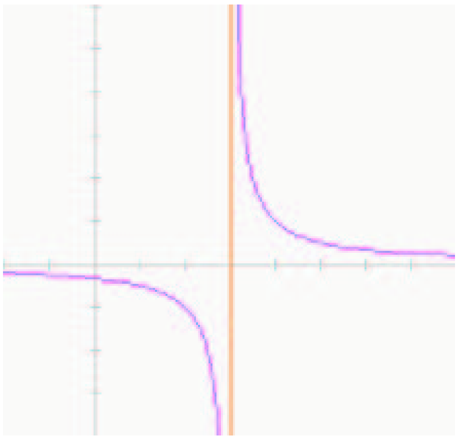
a) $2x+3=\frac{x+4}{2}$ **b)** $\frac{x-2}{x+3}=x^2+\frac{1}{2}$ **c)** $b=\frac{3g}{g-3}$ **d)** $\frac{2}{x}=\frac{x^2-5}{3}$ **e)** $\frac{3x-1}{2}=\frac{x^2}{5}$

In diesem Begleitmaterial wollen wir dir noch einmal aufzeigen, wie man Bruchgleichungen graphisch löst. Als Beispiel soll die Gleichung $\frac{1}{x}+2=\frac{1}{x-3}$ dienen.

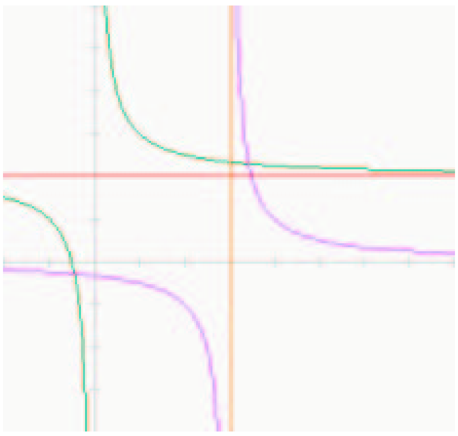
- Der Graph der linken Seite ist eine um 2 nach oben verschobene Normalhyperbel. Also zeichnet man zuerst die waagerechte Asymptote in der Höhe 2 und dann den Graphen.



- Mit dem Term auf der rechten Seite verfährt man entsprechend. Nur ist diese Hyperbel um 3 nach rechts verschoben. Es lohnt sich also, zuerst die senkrechte Asymptote bei 3 zu zeichnen.



- Zusammen ergibt sich folgendes Bild



- Das die Gleichung zwei Lösungen hat, erkennt man sofort. Die x-Werte -0,44 und 3,44 lassen sich sicherlich nur ziemlich schlecht ablesen.

13. Löse graphisch folgende Bruchgleichungen

a) $\frac{3}{x}=\frac{1}{x-2}$ b) $\frac{4}{x+5}=1$ c) $\frac{3}{x-5}=\frac{7}{x-3}$ d) $\frac{1}{x-3}+2=-\frac{1}{2}x+4$